

TEORETICKÁ ČÁST

Poznámka a prosba: Vážené studentky, vážení studenti,

prosím, berte tyto výsledky jako „pracovní“, opsal jsem je od studentek, které tyto příklady počítaly loni (s jejich vědomím :-)) a samozřejmě i ony mohly udělat chybu či chyby.

Proto vás prosím, jakmile zjistíte u kteréhokoliv příkladu jakoukoliv nesrovnalost, napište mi ji prosím na můj email: d.kott@seznam.cz

Děkuji

Dalibor Kott

2. ČÍSELNÉ MNOŽINY

1.1 1, 2, 3, 4, 6, 7, 9. **1.2** $D(1\,320, 2\,772) = 132$, $n(198, 132) = 396$.

2.1 10200. **2.2** -58.

3.1 a) 3 517,402; b) $4 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^0 + 8 \cdot 10^{-2}$. **3.2** a) $\frac{39}{56}$; b) $\frac{2}{3}$; c) 5^6 ; d) $4 \cdot 10^7$. **3.3** a) $3,6 \cdot 10^{-3}$; b) $3,75 \cdot 10^2$.

3.4 a) 27,04; b) 27,0.

4.1 9,1. **4.2** a) 900; b) $36\sqrt[3]{2} - 25\sqrt{2}$; c) 17; d) -6; e) $2^{\frac{7}{3}} \cdot 3^{-\frac{8}{3}}$. **4.3** $-\frac{9}{4}$. **4.4** a) $-3 \cdot (\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{9})$; b) $\sqrt{3} + \sqrt{6} - 3$; c) $2^{-\frac{1}{2}} \cdot 5^{-2}$.

5.1 a) 3,319 602; b) 1 437 335,753.

3. VÝRAZY

1.1 a) $\text{st}(P) = 3$, $\text{st}(Q) = 2$, $\text{st}(R) = 2$; b) $4x^2$, $0x$, 2; c) -5, 0, -3; d) $P(2) = 29$, $Q(0) = 3$; $R(1) = 4$ e) $-4x^5 + 2x^4 + 10x^3 - 13x^2 - 6x + 15$. **1.2** $2x + 1$, $x \neq 1$.

2.1 a) $8xy \cdot (x + 2y) \cdot (2x - y)$; b) $9x^2 + 6x + 4$; c) $16x^3 - 60x^2 + 102x - 65$. **2.2** $(x + 3) \cdot (x - 1) \cdot (x - 2)$.

3.1 a) $\frac{x-1}{x}$, $x \neq 0$, $x \neq -1$, $x \neq 2$; b) $\frac{(x+2) \cdot (x-5)}{(x-4) \cdot (x-1)}$, $x \neq -3$, $x \neq 1$, $x \neq 4$, $x \neq -7$. **3.2** a) $-\frac{1}{3}$, $x \neq \pm\frac{1}{2}$, $x \neq 0$, $x \neq -2$; b) $\frac{2xy}{x^2-y^2}$, $x \neq \pm y$. **3.3** -1 v případě, kdy $x > 3$; 1 v případě, kdy $x < 3$.

4.1 a) $a^{\frac{1}{10}}$, $a > 0$; b) $x^{-\frac{1}{3}} \cdot (\frac{5}{3}x + 16)$, $x \neq 0$. **4.2** $a^{-\frac{1}{4}} \cdot b^{-\frac{5}{4}}$, $a, b > 0$. **4.3** a) $\sqrt{x+1} + 1$, $x \geq -1$, $x \neq 0$; b) x^3 , $x \geq 0$, $x \neq 1$. **4.4** a) 1, $a \neq b$, $a, b > 0$; b) $\frac{\sqrt{2+a-a}}{1-a}$; $a \in (-2, 1) \cup (1, 2)$.

4. ALGEBRAICKÉ ROVNICE A NEROVNICE

1.1 a) $V = \frac{2S}{a+c}$, $a = \frac{2S}{V} - c$; b) $t_2 = \frac{m_1c_1(t-t_1)}{m_2c_2} + t$; $t = \frac{t_1(m_1+c_1)+t_2(m_2+c_2)}{m_1+c_1+m_2+c_2}$. **1.2** a) $x \in \{1\}$; b) $x \in \emptyset$; c) $x \in \mathbb{R}$.

2.1 a) $x \in \{-3; 4\}$; b) $x \in \emptyset$; c) $x \in \{4 - \sqrt{31}; 4 + \sqrt{31}\}$; d) $x \in \{-\frac{1}{2}; 2\}$. **2.2** a) $2x^2 + 5x - 3 = 0$; b) $b = -3$, $x_2 = 3$.

3.1 a) $x \in \emptyset$; b) $x \in \mathbb{R} - \{-3; 4\}$.

4.1 a) $x \in \{-3; 4\}$; b) $x \in \{2\}$; c) $x \in \{9\}$; d) $x \in \{16\}$. **4.2** a) $x \in \{2\}$; b) $x \in \{5\}$; c) $x \in \{-27; 64\}$; d) $x \in \{-24; 24\}$.

5.1 a) $x \in \{-2; 7\}$; b) $x \in \emptyset$; c) $x \in \langle -2; -1 \rangle$; d) $x \in \{3\}$; e) $x \in \{\frac{1}{4} \cdot (11 - \sqrt{161}); \frac{1}{4} \cdot (11 + \sqrt{161}); 5\}$.

6.1 a) $x \in \{3\}$; b) $x \in \{\frac{3}{4}\}$; c) $x \in \{-8, 5\}$; d) $x \in \{2 + 3i; 2 - 3i\}$; e) $x \in \{7 + 4i\}$.

7.1 a) $[x, y] \in \{[3, 1]\}$; b) $[x, y] \in \mathbb{R}^2$; c) $[x, y] \in \emptyset$. **7.2** $[a, b] \in \{[-3, 4]\}$. **7.3** a) $[x, y, z] \in \{[7, 4, 10]\}$; b) $[x, y, z] \in \emptyset$. **7.4** $[x, y, z] \in \{[20, 16, 3]\}$.

8.1 a) $[x, y] \in \{[-10, -\frac{3}{2}]; [3, 5]\}$; b) $[x, y] \in \{[2, 1]\}$; c) $[x, y] \in \{[-1, 3], [0, 2]\}$; d) $[x, y] \in \{[\frac{3}{2}, \frac{5}{2}], [\frac{5}{2}, \frac{3}{2}]\}$; e) $[x, y] \in \{[5, 4]; [-5, -4]; [4, 5]; [-4, -5]\}$.

9.1 $a = 20$ cm, $b = 16$ cm. **9.2** $90 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ a $40 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. **9.3** 9 a 25. **9.4** 8Ω , 24Ω .

10.1 a) $x \in \{-2; 2; \sqrt{6}\}$; b) $x \in \{-1\}$; c) $x \in \{1 - \sqrt{7}; 1 + \sqrt{7}\}$.

11.1 a) $a = 0 \implies$ rovnice nemá smysl, $a \in \{-1; 1\} \implies x \in \emptyset$, $a \in \mathbb{R} - \{-1; 0; 1\} \implies x \in \{\frac{-2a}{a^2-1}\}$;

b) $a \in \{0; 4\} \implies x \in \emptyset$, $a \in \mathbb{R} - \{0; 4\} \implies x \in \{\frac{4-2a}{a-4}\}$; c) $a = 0 \implies$ rovnice nemá smysl, $a = 2 \implies x \in \emptyset$,

$a \in \mathbb{R} - \{0, 2\} \implies x \in \{\frac{a+2}{2-a}\}$; d) $a \in \{-2\sqrt{2}; -\frac{6}{5}; 2\sqrt{2}\} \implies x \in \emptyset$, $a \in \mathbb{R} - \{-2\sqrt{2}; -\frac{6}{5}; 2\sqrt{2}\} \implies x \in \{\frac{3a+20}{5a+6}\}$;

e) ??? chyba v zadání...; **11.2** $a = 0 \wedge b = 0 \implies x \in \mathbb{R}$, $a \neq 0 \vee b \neq 0 \implies x \in \{1\}$. **11.3** a) $a = -1 \wedge b =$

$= -2 \implies [x, y] \in \{[-2 - t; t]; t \in \mathbb{R} \text{ lib.}\}$, $a = -1 \wedge b \neq -2 \implies [x, y] \in \emptyset$, $a \in \mathbb{R} - \{1\}$, $b \in \mathbb{R} \text{ lib.} \implies x \in$

$\in \{[\frac{2+b}{a+1}; \frac{2-ab}{a-1}]\}$; b) $a = 0 \vee b = 0 \implies$ soustava nemá smysl, $a \neq 0 \wedge b \neq 0 \wedge a \neq b \implies [x, y] \in \{[\frac{b}{a}, \frac{a}{b}]\}$,

$a \neq 0 \wedge b \neq 0 \wedge a = b \implies [x, y] \in \{[\frac{t}{2t-1}; t]; t \in \mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\} \text{ lib.}\}$.

12.1 a) $x \in \emptyset$; b) $x \in \langle -\frac{1}{16}; +\infty \rangle$; c) $x \in \langle \frac{3-2\sqrt{15}}{3}; \frac{3+2\sqrt{15}}{3} \rangle$. **12.2** $x \in \{1\}$.

13.1 a) $x \in (-\infty; -2) \cup (\frac{1}{2}; +\infty)$; b) $x \in \{0\}$; c) $x \in (-2; -1) \cup (1; +\infty)$; d) $x \in (-3; 3)$. **13.2** a) $x \in (-\sqrt{2}; \sqrt{2}) \cup$

$\cup (1; \frac{3}{2})$; b) $x \in (-\infty; -\sqrt{2}) \cup \langle \sqrt{2}; 7 \rangle$; c) $x \in (-\infty; -\frac{11}{5}) \cup (-1; 1)$. **13.3** $x \in (-\infty; -1) \cup (0; 1)$.

14.1 a) $x \in -\infty; -3 \cup (3; +\infty)$; b) $x \in (-\infty; -5) \cup (\frac{1}{2}; +\infty)$; c) $x \in \mathbb{R}$; d) $x \in \emptyset$.

15.1 a) $x \in (-3; -\frac{1}{2}) \cup \langle \frac{1}{2}; 2 \rangle$; b) $x \in (-\infty; 2) \cup \langle 3; +\infty \rangle$; c) $x \in \mathbb{R}$; d) $x \in \langle \frac{5}{3}; +\infty \rangle$; e) $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$;

f) $x \in (-\infty; -\frac{4}{3}) \cup (6; +\infty)$. **15.2** a) $x \in (-\infty; -5) \cup (1; +\infty)$; b) $x \in \langle 3; 5 \rangle$; c) $x \in (-\infty; -6) \cup (-6; -\frac{7}{2}) \cup \langle -\frac{2}{7}; 2 \rangle$;

d) $x \in (-\infty; \frac{2}{3}) \cup \langle \frac{4}{3}; 2 \rangle \cup (4; +\infty)$.

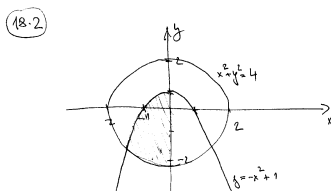
16.1 a) $x \in (-\infty; -4) \cup \langle 3; \frac{48}{13} \rangle$; b) $x \in \langle -7; 2 \rangle$; c) $x \in \{2\}$; d) ????

17.1 a) $x \in \emptyset$; b) $x \in (\frac{5}{4}; +\infty)$; c) $x \in (-\infty; 6)$; d) $x \in \emptyset$.

17.2 $x \in \langle 2; 7 \rangle$.

18.1 a) úsečka s krajními body $[1; 4]$ a $[\frac{8}{3}; \frac{7}{3}]$ kromě bodu $[1, 4]$; b) rovnoběžník $ABCD$ včetně jeho vnitřku,

kde $A = [-7; -4]$, $B = [-3; -4]$; $C = [5; 4]$, $D = [1, 4]$. **18.2** viz obrázek.



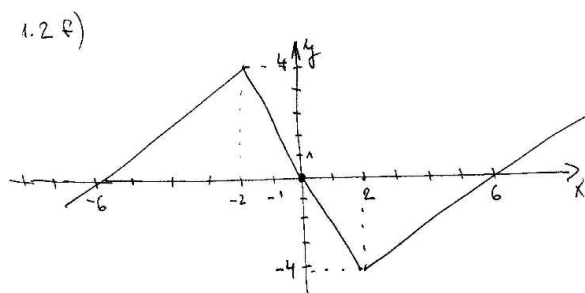
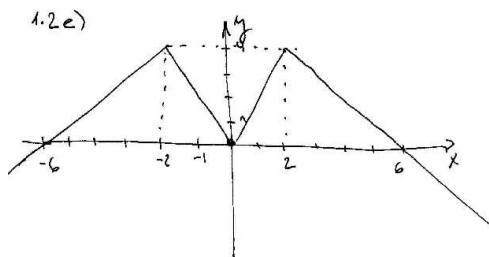
19.1 ?? **19.2** a) ??; b) $v \in (4; \frac{1}{3} \cdot (8 + \sqrt{61}))$.

20.1 $a = 2 \implies x \in \emptyset$, $a \in (0; 2) \implies x \in (-\infty; -\frac{1}{a})$, $a \in (2; +\infty) \implies x \in (-\frac{1}{a}; +\infty)$. **20.2** $a \in (3; 5)$.

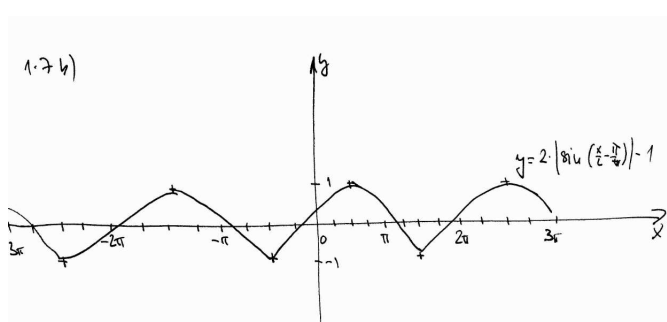
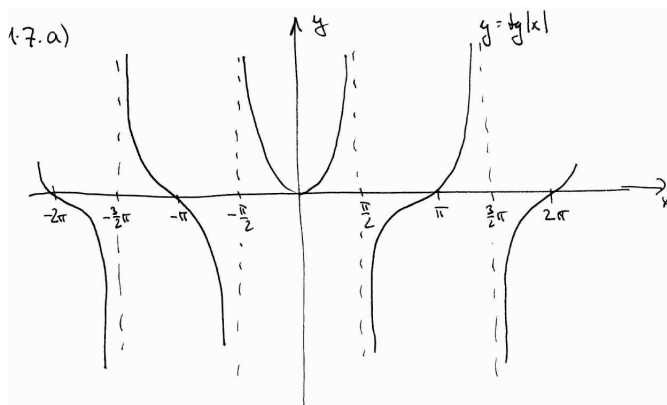
20.3 $c \in (2; +\infty) \implies x \in \emptyset$, $c = 2 \implies x \in \{3\}$, $c \in (-\infty; 2) \implies x \in (1 + c; 5 - c)$.

5. FUNKCE

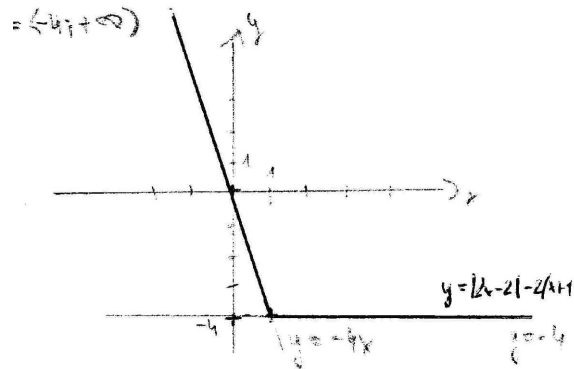
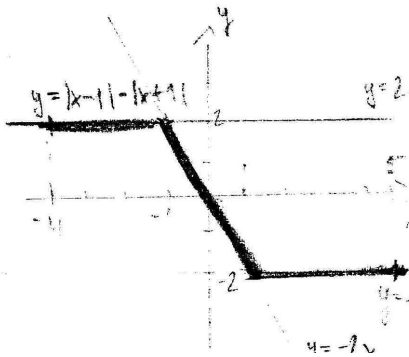
1.1 a) ano; b) ne; c) ano; d) ne. 1.2 a) $D(f) = (-\infty; 0)$, $H(f) = (-\infty; 4)$, je rostoucí v $(-\infty; -2)$, je klesající v $(-2; +\infty)$, má v bodě $x = -2$ maximum, nemá minimum; b) $f(-5) = 1$, $f(-2) = 4$, $f(1)$ neexistuje; c) $f(x) = -1 \iff x \in \{-7\}$; $f(x) = 0 \iff x \in \{-6; 0\}$; $f(x) = 5 \iff x \in \emptyset$; d) není, protože například $f(0) = f(-6) = 0$; e) viz obr.; f) viz obr.



1.3 a) $D(f) = (3; 5) \cup (5; \infty)$; b) $D(f) = \emptyset$; c) $D(f) = (4; +\infty)$; d) $x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (-\frac{5}{6}\pi + 2k\pi; \frac{5}{6}\pi + 2k\pi)$. 1.4 a) $f^{-1}: y = \frac{x+4}{2}$; b) $f^{-1}: y = -\frac{3}{x}$; c) $f^{-1}: y = \sqrt{x}$; d) $f^{-1}: y = (x-1)^2 + 2$; e) $f^{-1}: y = \log_2(x+3)$. 1.5 $D(f) = \mathbb{R}$, $H(f) = \mathbb{R}^+$, rostoucí v $(-\infty; 0)$; klesající v $(0; +\infty)$. 1.6 Funkce f a g se rovnají na množině $\mathbb{R} - \{1; 2\}$. 1.7 a) viz obr.; b) viz obr.



2.1 a) $H(f) = \langle -1; 4 \rangle$, $P_x = [3; 0]$; $P_y = [0; 3]$ b) $D(f) = \langle -1; 2 \rangle$, $P_x = [\frac{1}{2}; 0]$; $P_y = [0; -1]$. 2.2 a) $f: y = 2x - 3$; b) $f: y = 2x - 5$. 2.3 a) není prostá, není sudá, je lichá, je klesající v $\langle -1; 1 \rangle$, je omezená, má maximum, má minimum, nemá žádný ostrý extrém; náčrt grafu viz obr.; b) není prostá, není sudá, není lichá, je klesající v $(-\infty; 1)$, je omezená pouze zdola, nemá maximum, má minimum, nemá žádný ostrý extrém; náčrt grafu viz obr.;



2.4 a) $m \in (3; +\infty) \implies x \in \emptyset$, $m = 3 \implies x \in \{1\}$, $m \in (-\infty; 3) \implies x \in \{m-2; 4-m\}$; b) $x \in \mathbb{R}$.

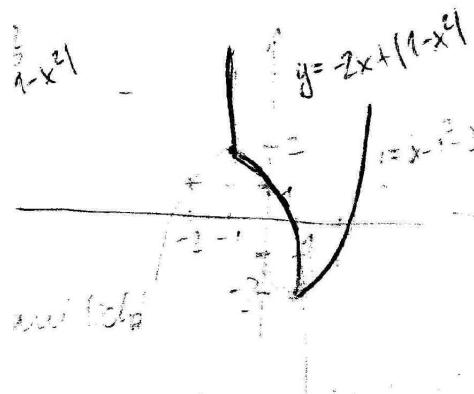
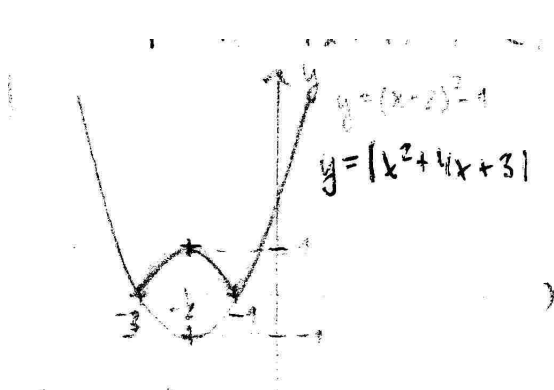
3.1 a) $f(-1) = -7$, $f(7) = 9$; b) $f(x) = 9 \iff x \in \{-3; 7\}$; $f(x) = -\frac{55}{4} \iff x \in \{\frac{1}{2}; \frac{7}{2}\}$; $f(x) = -20 \iff x \in \emptyset$;

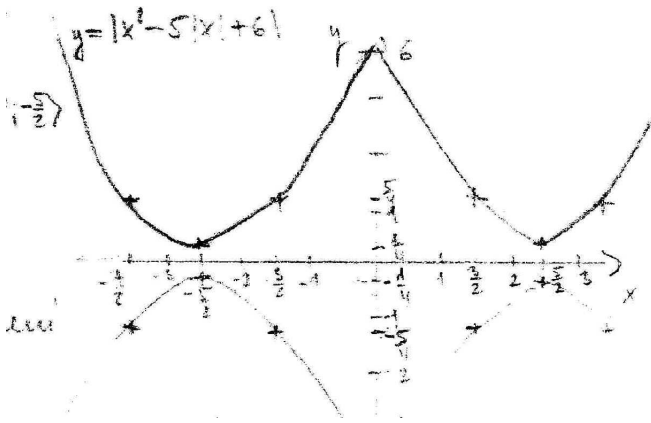
c) $P_y = [0; -12]$; $P_x \in \{-2; 0\}, [6; 0]$; d) $V = [2; -16]$. 3.2 a) není ani sudá, ani lichá, ani prostá. Je klesající pro

$x \in (-\infty; -3)$ a pak v $\langle -1; +\infty \rangle$, $P_x = \{-1; 0\}, [-3; 0]$, je omezená zdola, má minimum v bodě $x = -1$, není omezená shora, nemá maximum.

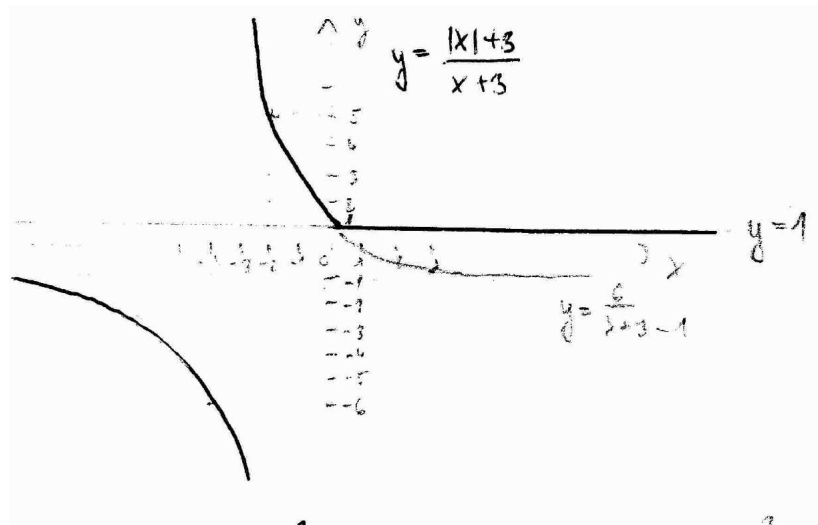
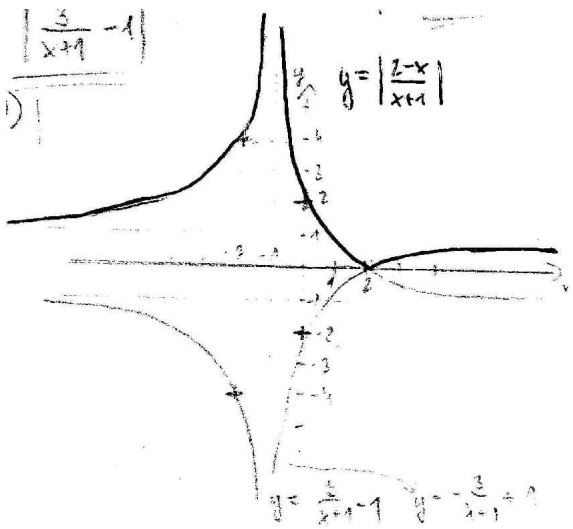
b) není ani sudá, ani lichá, ani prostá. Je klesající pro $x \in (-\infty; 1)$, rostoucí v $\langle -1; +\infty \rangle$, $D(f) = \mathbb{R}$, $H(f) = \langle -2; +\infty \rangle$, $P_x = \{-\sqrt{2} + 1; 0\}, [\sqrt{2} + 1; 0]$, $P_y = [0; 1]$, je omezená zdola, má minimum v bodě $x = 1$, není omezená shora, nemá maximum.;

c) není prostá, není lichá, je sudá, je klesající v $(-\infty; -\frac{5}{2})$ a v $\langle 0; \frac{5}{2} \rangle$ a v $\langle \frac{5}{2}; +\infty \rangle$, je omezená zdola, není omezená shora, má minimum v bodech $x = \pm \frac{5}{2}$, nemá maximum.



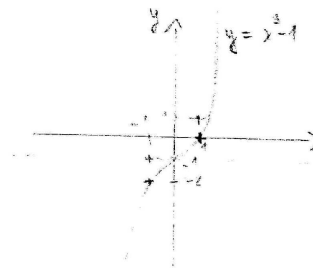
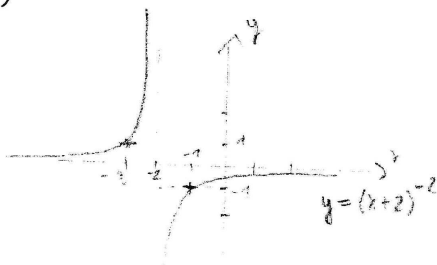


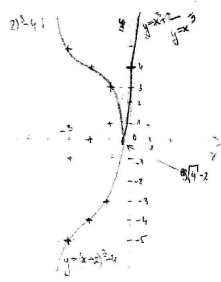
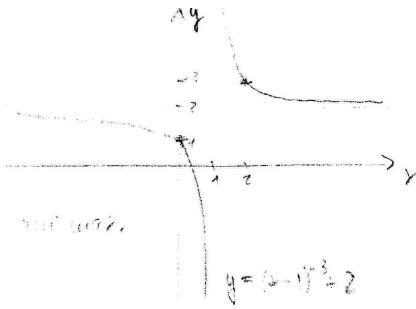
4.1 a) $D(f) = \mathbb{R} - \{2\}$, $H(f) = \mathbb{R} - \{1\}$; b) $y = 1$, $x = 2$; c) $P_x = [-1; 0]$, $P_y = [0; -\frac{1}{2}]$; d) $x = 1$. 4.2 a) viz obr.; b) viz obr.



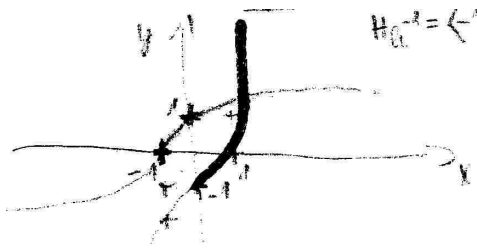
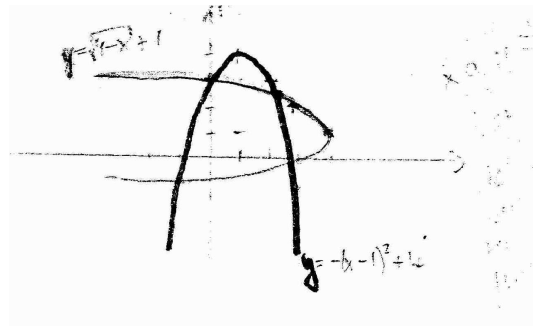
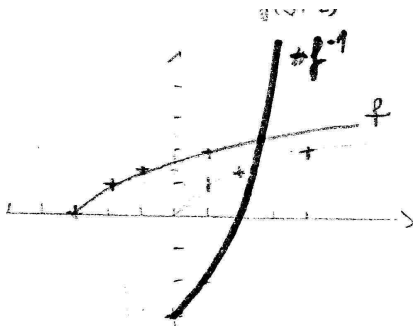
5.1 a) $f(x) = 64 \iff x = 4$, $f(x) = -8 \iff x = -2$; b) $f(x) = \frac{1}{64} \iff x = 8$, $g(x) = \frac{1}{64} \iff x = \frac{1}{4}$. 5.2 a) viz obr.; b) viz obr.; c) viz obr.; d) viz obr..

2 a)





5.3 $f^{-1}: y = x^2 - 3, D(f^{-1}) = (0; +\infty), H(f) = (-3; +\infty); g^{-1}: y = -(x-1)^2 + 4, D(g^{-1}) = (-\infty; 4), H(f) = (1; +\infty); h^{-1}: y = x^3 - 1, D(h^{-1}) = H(f) = \mathbb{R};$



6.1 a)

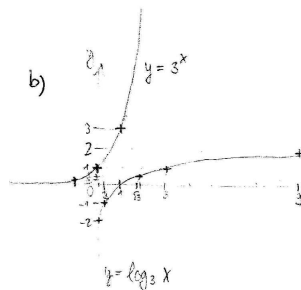
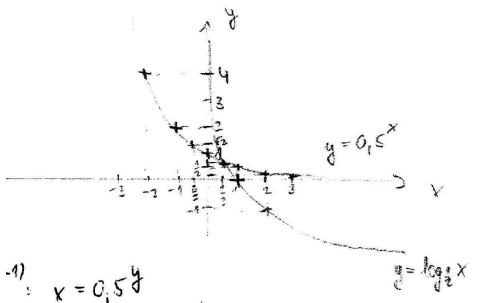
x	0	1	2	-1	-2	$\frac{1}{2}$	-3	$-\frac{1}{2}$	3
y	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	2	4	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	8	$\sqrt{2}$	$\frac{1}{8}$

 b) viz obr. c) $x \in (-\infty; -2);$ d) $f^{-1}: y = \log_{\frac{1}{2}} x;$

6.2 a)

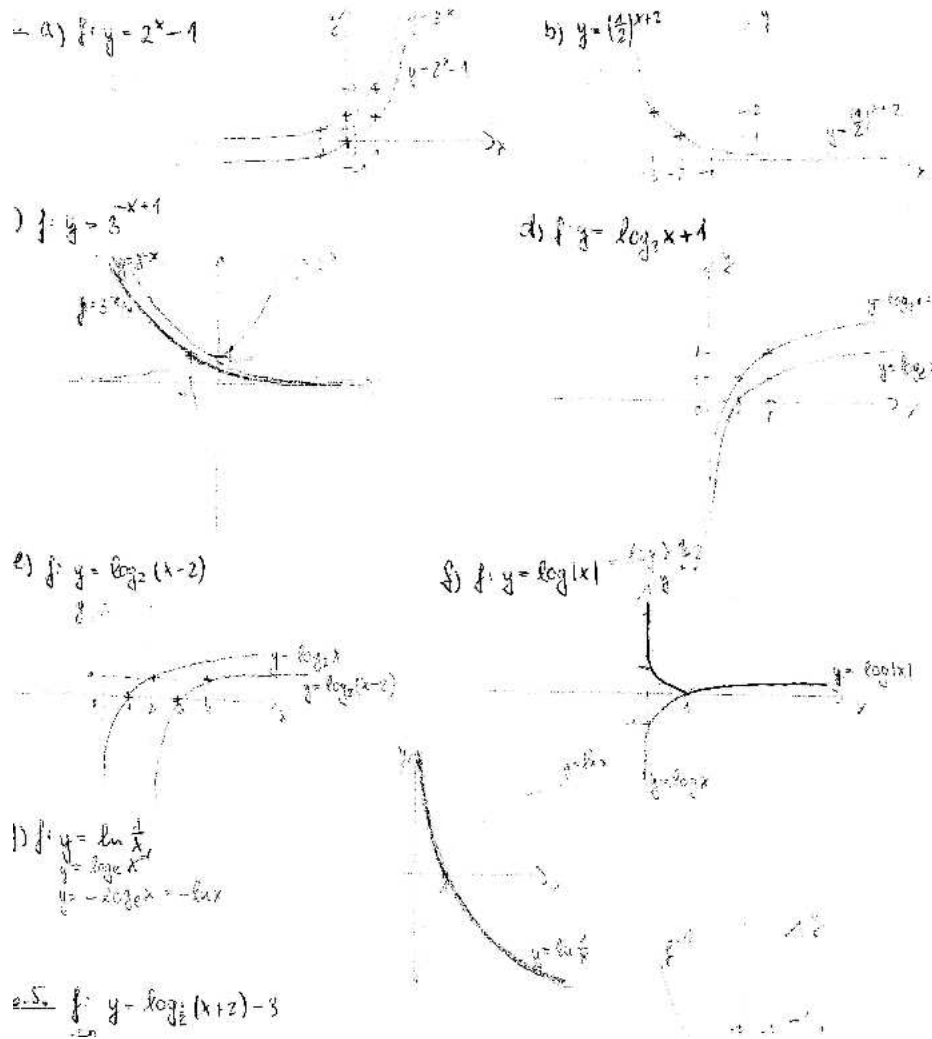
x	1	3	$\frac{1}{3}$	9	$\frac{1}{9}$	$\sqrt{3}$
y	0	1	-1	2	-2	$\frac{1}{2}$

 b) viz obr.; c) $x \in (9; +\infty);$ d) $f^{-1}: y = 3^x.$

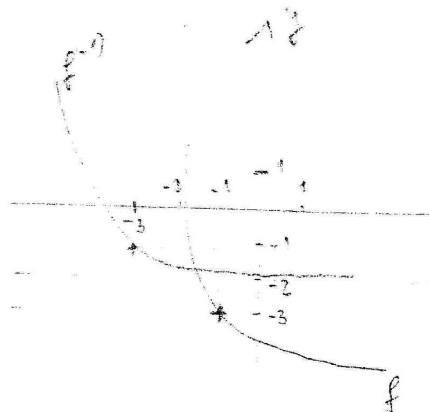


6.3 a) $D(f) = (-2; 2);$ b) $D(f) = (-\infty; 0) \cup (5; +\infty);$ c) $D(f) = (4; 5) \cup (5; +\infty);$ d) $D(f) = (0; e) \cup (e; +\infty).$

6.4 viz obr.



6.5 $f^{-1}: y = (\frac{1}{2})^{x+3} - 2$; $g^{-1}: y = 3 + \ln(\frac{7}{5} \cdot (x-2))$

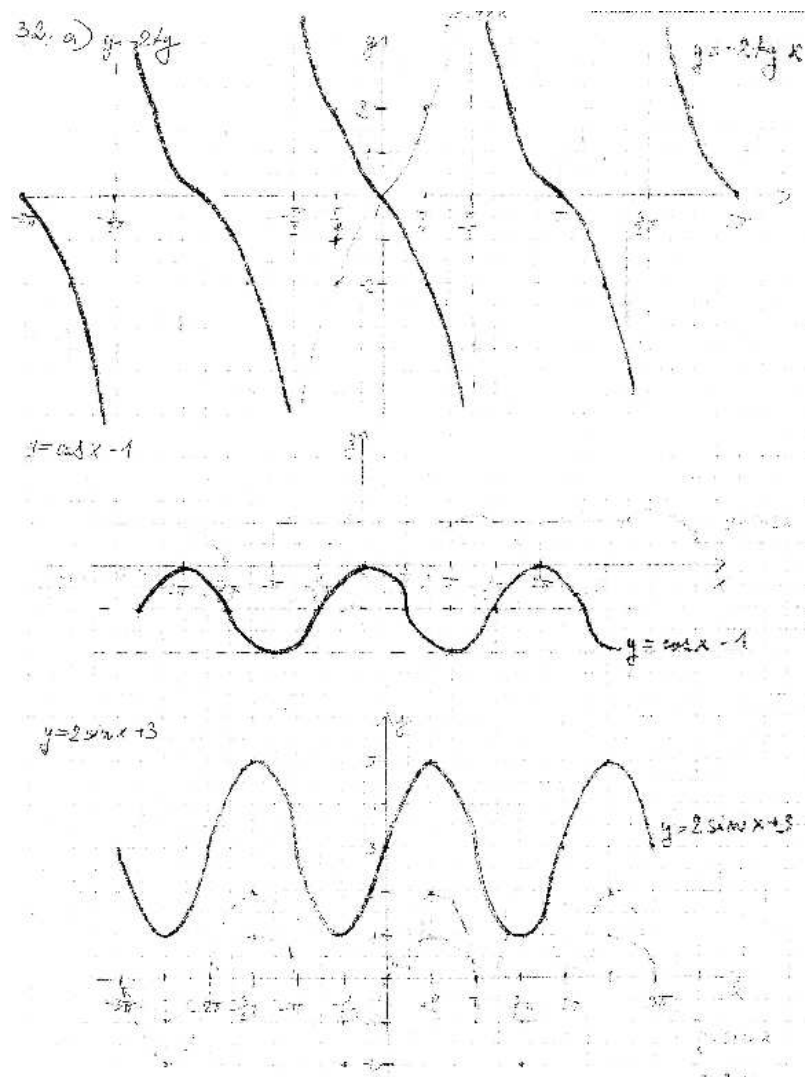


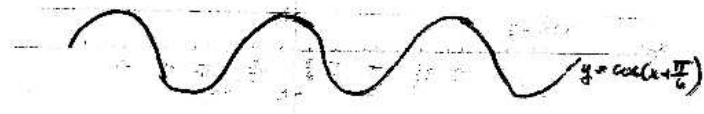
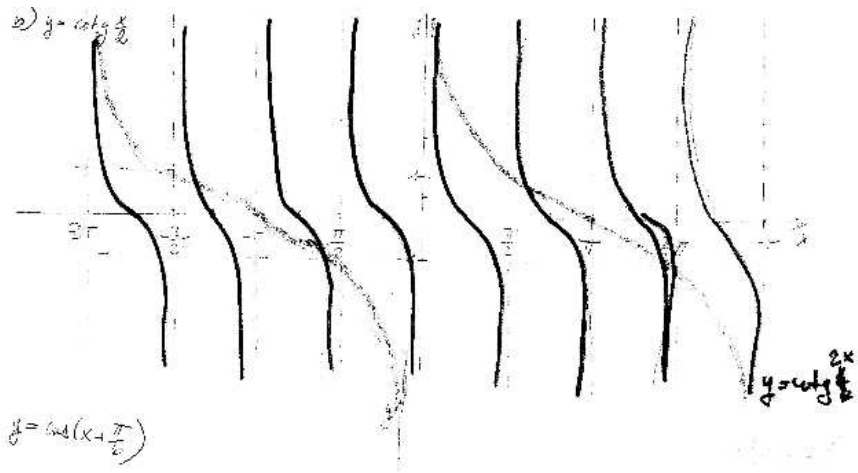
- 7.1 a) $x = -1$; b) $x = 4$; c) $x = 2^{-5}$. 7.2 a) $\log b - \frac{3}{2} \log a + \frac{1}{2} \log c - \log(b+c)$; b) $V_n = V_0 \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)^n$.
 7.3 a) $x \in \{-\frac{3}{2}\}$; b) $x \in \{\log_3 \frac{11}{2}\}$; c) $x \in \emptyset$; d) $x \in \{\frac{2}{3}, 4\}$; e) $x \in \{4\}$; f) $x \in \{2\}$. 7.4 a) $x \in \{2^{-3}\}$;
 b) $x \in \{\frac{3}{2}, 3\}$; c) $x \in \{\frac{1}{4}\}$; d) $x \in \{10^{-2}, 10^{\frac{5}{3}}\}$. 7.5 a) $x \in \{0\}$; b) $x \in \{10^{\frac{4}{3}}\}$; c) $x \in \{10^3, 10^{\log_2 \frac{1}{3}}\}$.
 7.6 a) $[x, y] \in \{[3; 9]\}$; b) $x \in \{\}$.

6. GONIOMETRIE A TRIGONOMETRIE

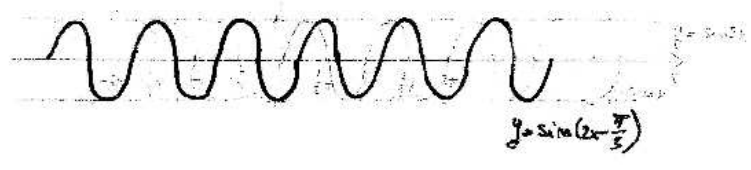
1.1 $60^\circ = \frac{1}{3}\pi$; $150^\circ = \frac{5}{6}\pi$; $315^\circ = \frac{7}{4}\pi$; $175^\circ = \frac{35}{36}\pi$; $354^\circ = \frac{59}{30}\pi$; 1.2 $\frac{\pi}{4} = 45^\circ$; $\frac{5\pi}{6} = 150^\circ$; $\frac{4\pi}{3} = 240^\circ$; $\frac{9\pi}{10} = 162^\circ$; $\frac{7\pi}{2} = 630^\circ$; $0,75 \doteq 43^\circ$; $2,4 \doteq 137,5^\circ$; $4,1 \doteq 234,91^\circ$.

2.1 a) $|BC| = 8$ cm; b) $\sin \varphi = \frac{3}{5}$, $\cos \varphi = \frac{4}{5}$, $\cotg \varphi = \frac{4}{3}$; c) $\varphi \doteq 36^\circ 52'$. 2.2 a) Sestrojíme pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou $|AB| = 5$ a odvěsnou $|BC| = 3$; b) Sestrojíme pravoúhlý trojúhelník ABC s odvěsnami $|BC| = 3$ a $|AC| = 5$.





$y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right)$



$$3.3. a) f: y = 3 \cos\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{6}\right) - 1 = 3 \cos\left(\frac{1}{2}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 1\right)$$

